Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

Références : Gourdon, Rombaldi, Grifone, Perrin (Dev 1), Rouvière (calcul diff)

I - Formes linéaires, espace dual

1) Espace dual, base duale

2) Bidual, base antéduale

3) Espaces vectoriels quotient

II - Orthogonalité et transposition

1) Orthogonal d'une partie au sens de la dualité

2) Orthogonal au sens euclidien

3) Transposition

III - Applications

1) Formes linéaires en calcul différentiel

2) Lien avec les systèmes linéaires

DEV 1 : Cartan - Dieudonné + intersection d'hyperplans

DEV 2 : Extrema liés + lemme

Leçon 159 : Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

E désigne un K-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$

I - Formes linéaires, espace dual [GOU] [ROM]

1) Espace dual, base duale

DEF 1 : On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans K. On note $E^* = \mathcal{L}(E,K)$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

EX 2 : • Si $\mathcal{B} = (e_j)_{1 \leq j \leq n}$ est une base de E, alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_i$ est une forme linéaire

• $P \in K[X] \mapsto P(0)$ et $M \in \mathcal{M}_n(K) \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$ où $A \in \mathcal{M}_n(K)$

DEF 3 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la forme linéaire e_i^* par $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$ s'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i.

THM 4 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}$ et donc $\dim(E^*) = \dim(E)$. Pour tout $\varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$.

EX 5 : En notant $\mathcal{B} = (X^j)_{j \in [\![0;n]\!]}$ la base canonique de $K_n[X]$ sa base duale est donnée par $a_j = \frac{P^{(j)}(0)}{j!}$, $j \in [\![0;n]\!]$.

2) Bidual, base antéduale [GOU]

DEF 6 : On appelle bidual de E l'espace dual de E^*, noté E^{**}

THM 7 : Si $x \in E$, on note $\tilde{x} : \begin{array}{l} E^* \to K \\ \varphi \mapsto \varphi(x) \end{array}$. Alors $\tilde{x} \in E^{**}$ et l'application $f : \begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto \tilde{x} \end{array}$ est un isomorphisme

REM 8 : Cet isomorphisme est canonique. On identifie alors E et son bidual.

REM 9 : En dimension infinie, f est injective mais pas surjective.

PROP 10 : Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que pour $i \in [\![1;n]\!]$, $e_i^* = f_i$. Cette base s'appelle base antéduale de $(f_1, \dots, f_n)$.

PROP 11 : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ sa base duale. Soit $(\mathcal{B}')^*$ une base de E^* et $\mathcal{B}'$ sa base antéduale. Si $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^* \to \mathcal{B}'^*} = {}^tC^{-1}$.

LEMME 12 : Soient E, F, G trois espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(E,G)$. Alors $\ker(u) \subset \ker(v)$ si et seulement s'il existe $w \in \mathcal{L}(F,G)$ telle que $v = w \circ u$. DEV 2a)

THM 13 : Si $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_p$ sont des formes linéaires sur E telles que $\bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i) \subset \ker(\varphi)$, alors φ est combinaison linéaire des φ_i.

3) Espaces vectoriels quotient [GOU]

DEF 14 : Soit F un sous-espace vectoriel de E. La relation $\mathcal{R}$ définie par ($x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in F$) est une relation d'équivalence sur E. L'espace quotient est noté E/F et c'est un K-espace vectoriel pour les lois $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x+y}$ et $\lambda \bar{x} = \overline{\lambda x}$

DEF 15 : Si E/F est de dimension finie, on dit que F est de codimension finie dans E. On appelle alors codimension de F dans E et on note $\mathrm{codim}_E(F)$ l'entier $\dim(E/F)$.

PROP 16 : F est de codimension finie dans E si et seulement si F admet un supplémentaire S dans E de dimension finie. On a alors $\dim(S) = \mathrm{codim}_E(F)$ et donc $\mathrm{codim}_E(F) = \dim(E) - \dim(F)$.

THM 17 : Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à $E/\ker(f)$.

DEF 18 : Si $\mathrm{codim}_E(F) = 1$, on dit que F est un hyperplan de E.

II - Orthogonalité et transposition

1) Orthogonal d'une partie au sens de la dualité [GOU]

DEF 19 : Des éléments $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dits orthogonaux lorsque $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle = 0$

• Si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{\varphi \in E^* \mid \forall x \in A, \varphi(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E^* appelé orthogonal de A

• Si $B \subset E^*$, on note $B^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de E appelé orthogonal de B.

REM 20 : Si $\varphi \in E^*$, alors $\mathrm{Vect}(\varphi)^\circ = \ker(\varphi)$

PROP 21 : • Si $A_1 \subset A_2 \subset E$, alors $A_2^\perp \subset A_1^\perp$

• Si $B_1 \subset B_2 \subset E^*$, alors $B_2^\circ \subset B_1^\circ$

• Si $A \subset E$, alors $A^\perp = \mathrm{Vect}(A)^\perp$

• Si $B \subset E^*$, alors $B^\circ = \mathrm{Vect}(B)^\circ$

THM 22 : Soit F un sev de E, G un sev de E^*.

$\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $(F^\perp)^\circ = F$

$\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$ et $(G^\circ)^\perp = G$

DEV 1a)

COR 23 : • Soit p formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ de E^* telles que $\mathrm{rg}(\varphi_1, \dots, \varphi_p) = r$. Le sous-espace $F = \bigcap_{i=1}^{p} \ker(\varphi_i)$ est de dimension $n-r$.

• Réciproquement, si F est un sous-espace vectoriel de dimension q, il existe $n-q$ formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-q}$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \ker(\varphi_i)$

EX 24 : Soit $F = \mathrm{Vect}((1,3,-2,2,3),(1,4,-3,4,2),(2,3,-1,-2,9))$ sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^5$ s'écrit comme le système [GRI]

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_4 = 0 \\ -6x_1 + x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

PROP 25 : Soit $\varphi \in E^*$ non nulle. Alors, $\ker(\varphi)$ est un hyperplan de E. Réciproquement, tout hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.

PROP 26 : Si H est un hyperplan de E, l'ensemble $H^\perp$ des formes linéaires sur E qui s'annulent sur H est une droite de E^*.

2) Orthogonal au sens euclidien [GOU] [PER] [ROT]

On munit E d'une structure euclidienne $\langle\cdot|\cdot\rangle$

DEF 27 : Deux vecteurs x et y de E sont dits orthogonaux lorsque $\langle x|y\rangle = 0$

Pour F un sev de E, on définit $F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \langle x|y\rangle = 0\}$

C'est un sous-espace vectoriel de E.

EX 28 : L'orthogonal de l'espace des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}([a;b],\mathbb{R})$ est réduit à la fonction nulle

DEF 29 : Soit F sev de E, soit $x \in E$, on appelle projection orthogonale de x sur F l'unique vecteur y de F tel que $\|x-y\| = d(x,F)$ $\forall x \in E$.

PROP 30 : Ce vecteur est également l'unique vecteur y de F tel que $x - y \in F^\perp$. Si $(e_k)_{k \in [\![1;p]\!]}$ est une base orthonormée de F, alors $y = p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle x|e_k\rangle e_k$.

EX 31 : Si $D = \mathrm{Vect}(a)$, $a \in E$, $a \neq 0$, alors $p_D(x) = \langle x | \frac{a}{\|a\|}\rangle \frac{a}{\|a\|}$

COR 32 : On a la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

THM 33 : (Représentation de Riesz) L'application suivante :

$$\begin{aligned} \varphi : E &\to E^* \\ y &\mapsto \varphi_y : E \to K \\ & \qquad x \mapsto \langle x|y\rangle \end{aligned}$$

est une isométrie linéaire surjective.

On identifie alors canoniquement E à E^*. DEV 1b)

THM 34 : (Cartan-Dieudonné) Si q est une forme quadratique définie positive (un produit scalaire), le groupe $O(q)$ est engendré par les réflexions orthogonales. Plus précisément si $u \in O(q)$, u est produit d'au plus r réflexions où $r = \mathrm{rg}(u - \mathrm{Id}_E)$. De plus, ce nombre r est minimal

THM 35 : Pour $n \geq 3$, $SO(q)$ est engendré par les renversements

DEF 36 : On appelle symétrie orthogonale la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$: $\forall x \in E$, $s_F(x) = 2p(x) - x$

3) Transposition [GOU] [ROT]

Soient E, F deux K-espaces vectoriels de dimension finie

DEF 37 : Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Pour tout $f \in F^*$, on a $f \circ u \in E^*$

L'application $\begin{aligned} {}^t u : F^* &\to E^* \\ f &\mapsto f \circ u \end{aligned}$ est appelée application transposée de u et notée ${}^t u$.

PROP 38 : L'application $u \mapsto {}^t u$ est linéaire injective

THM 39 : Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$. On a :

• ${}^t(v \circ u) = {}^t u \circ {}^t v$

• Pour $F = E$, ${}^t \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_{E^*}$

• Si $u \in GL(E,F)$, alors ${}^t u \in GL(F^*,E^*)$ et $({}^t u)^{-1} = {}^t u^{-1}$

• $\ker({}^t u) = \mathrm{Im}(u)^\perp$

• u surjectif $\iff$ ${}^t u$ est injectif

• $\mathrm{Im}({}^t u) = (\ker(u))^\perp$

• u est injectif $\iff$ ${}^t u$ est surjectif

• Si $\dim(E) = \dim(F)$, $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}({}^t u)$

THM 40: Si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est la matrice de $u \in \mathcal{L}(E,F)$ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors la matrice de ${}^t u$ dans les bases $\mathcal{B}'^*$ et $\mathcal{B}^*$ est ${}^t A$.

DEF 41: On définit le crochet de dualité par : $\forall f \in E^*, \forall x \in E, \langle f, x \rangle = f(x)$.

REM 42: La transposée vérifie donc : $\forall y \in F^*, \forall x \in E$,
$\langle u(x), y \rangle = \langle x, {}^t u(y) \rangle$

REM 43: On peut faire le lien avec l'adjoint d'un endomorphisme dans un espace euclidien (donné par le THM 33) : on a $u^* = \varphi^{-1} \circ {}^t u \circ \varphi$.

PROP 44: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Un sev F de E est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par ${}^t u$.

III - Applications

1) Formes linéaires en calcul différentiel [Gao] [ROU]

DEF 45: Soient E, F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, $U \subset E$ un ouvert et $f : U \to F$. On dit que f est différentiable en $a \in U$ lorsqu'il existe $\varphi \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $f(a+h) = f(a) + \varphi(h) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|)$
Si φ existe, elle est unique et s'appelle la différentielle de f en a notée $df(a)$.

PROP 46: Si E est euclidien et $f : U \subset E \to \mathbb{R}$ est différentiable en $a \in U$, alors $df(a) \in E^*$ et il existe donc un unique vecteur $v \in E$ tel que $df(a)(h) = \langle v | h \rangle$ pour tout $h \in E$.

DEF 47: Ce vecteur v s'appelle le gradient de f en a et est noté $\nabla f(a)$.

PROP 48: On peut exprimer le gradient dans la base canonique $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ de $\mathbb{R}^n$: $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$

[ROU] p. 80 **REM 49**: Dans le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien, soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $a \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(a) \neq 0$ et γ un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^1$ avec $\gamma(0) = a$ et $\|\gamma'(t)\| = 1$ pour tout $t \in [0;1]$. Alors le vecteur $\nabla f(a)$ donne la direction de la plus grande pente de f en a.

PROP 50: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ admet un extremum en $a \in U$, et si f est différentiable en a, alors $df(a) = 0$ i.e $\nabla f(a) = 0$ (DEV 2a)

THM 51 (Extrema liés) Soient $f, g_1, \dots, g_r : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $\Gamma = \{x \in U \,/\, g_1(x) = \dots = g_r(x) = 0\}$. Si $f_{|\Gamma}$ admet un extremum relatif en $a \in \Gamma$ et si $dg_1(a), \dots, dg_r(a)$ sont linéairement indépendantes, alors il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tels que $df(a) = \lambda_1 dg_1(a) + \dots + \lambda_r dg_r(a)$.

REM 52: Les multiplicateurs de Lagrange $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont uniques.

2) Application à la résolution de systèmes linéaires

REM 53: Soit H un hyperplan de E et $\varphi \in E^*$, $\varphi \neq 0$ telle que $H = \ker(\varphi)$. Alors :
$H = \{x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,/\, \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n = 0\}$ avec $\alpha_j = \varphi(e_j)$ non tous nuls.

REM 54: Comme tout sous-espace vectoriel F peut être vu comme une intersection fini d'hyperplans, F peut être décrit par un système d'équations, représenté par une matrice. La matrice échelonnée réduite associée (par la méthode du pivot de Gauss) permet de trouver une base de l'espace F.